Universidad Carlos III de Madrid
Escuela Politécnica Superior

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

Primer curso. Ingeniería de Telecomunicación

Cálculo II. Examen final, mayo de 2009 **Duración: 3 h y 30 min.**

Problema 1. (1 p.) Prueba que la siguiente integral impropia sólo converge para un valor del parámetro α y dí cuál es ese valor

$$\int_0^{\infty} \Big(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{\alpha}{x+1} \Big)\, dx, \qquad \alpha > 0.$$

Problema 2. (2 p.) Halla el área encerrada entre las curvas

$$y = x^2,\ y = 2x^2,\ x = y^2,\ x = 2y^2.$$

Problema 3. (2 p.) Calcula el momento de inercia respecto del eje vertical del sólido generado por la intersección de los conjuntos $\{x^2 + y^2 \leq z^2,\ z \geq 0\}$ y $\{x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ si la densidad de masa en cada punto es la distancia del mismo al origen.

Problema 4. (1 p.) Resuelve el siguiente problema de valor inicial

$$y'' + 2y' + y = \mathrm{e}^{-3t},$$
$$y(0) = 1,\ y'(0) = 0.$$

Problema 5. (2 p.) Verifica el Teorema de Green para calcular la integral de línea de la función

$\mathbf{F}(x, y) = (-y, x + y)$ a lo largo la curva $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1$ orientada de manera positiva, es decir, en sentido antihorario.

Problema 6. (2 p.) Calcula el flujo a través de la superficie que delimita el sólido $\Omega = [-1, 1]^3$ del campo vectorial

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \left(e^{y^2+z^2} + \int_0^x te^{t^2} dt, e^{x^2+z^2}, z \right).$$

Problema 1. La integral es impropia en $x \to \infty$. Si la comparamos con $\dfrac{1}{x+1}$ que diverge,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} - \dfrac{\alpha}{x+1}}{(x+1)^{-1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x+1-\alpha\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1+1/x-\alpha\sqrt{1/x^2+1}}{\sqrt{1/x^2+1}} = 1-\alpha.$$

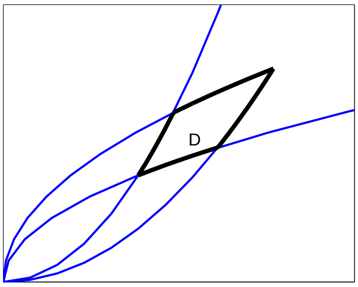
- Si $1-\alpha \neq 0$ La integral diverge, ya que se comporta como $\dfrac{1}{x+1}$.
- Si $\alpha = 1$ no podemos concluir nada todavía. Comparamos con $\dfrac{1}{(x+1)\sqrt{1+x^2}}$, que converge (esto se ve al comparar esta última con $1/x^2$):

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} - \dfrac{1}{x+1}}{\dfrac{1}{(x+1)\sqrt{1+x^2}}} &= \lim_{x\to\infty} (x+1-\sqrt{1+x^2}) = \lim_{x\to\infty} \frac{(x+1)^2-(1+x^2)}{x+1+\sqrt{1+x^2}} = \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{x+1+\sqrt{1+x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{1+1/x+\sqrt{1/x^2+1}} = 1.\end{aligned}$$

Por lo tanto la integral impropia es convergente sólo para $\alpha = 1$.

Problema 2.

Haciendo el cambio de variable $u = x^2/y,\ v = y^2/x$, $D^* = \{(u,v) \in [1/2,1]\times[1/2,1]\}$, podemos calcular el jacobiano inverso



$$J^{-1} = \begin{vmatrix} 2x/y & -x^2/y^2 \\ -y^2/x^2 & 2y/x \end{vmatrix} = 3 \Rightarrow J = \frac{1}{3}.$$

Por lo que el área es

$$A = \iint_D dA = \iint_{D^*} |J|\,dA^* = \frac{1}{3}\int_{1/2}^{1}\int_{1/2}^{1} dudv = \frac{1}{12}.$$

También podemos hacer el siguiente cambio de variable, $u = y/x^2,\ v = x/y^2,\ D^* = \{(u,v) \in [1,2]\times[1,2]\}$, cuyo jacobiano inverso es $J^{-1} = \dfrac{3}{x^2y^2} = 3u^2v^2$ y, por tanto, $J = \dfrac{1}{3u^2v^2}$.

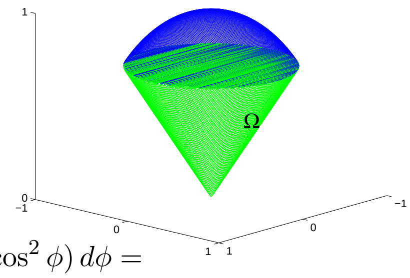
Otra forma de hallar el área, sin realizar ningún cambio de variable es

$$A = \int_{2^{-1}}^{2^{-2/3}}\int_{\sqrt{x/2}}^{2x^2} dy\,dx + \int_{2^{-2/3}}^{2^{-1/3}}\int_{\sqrt{x/2}}^{\sqrt{x}} dy\,dx + \int_{2^{-1/3}}^{1}\int_{x^2}^{\sqrt{x}} dy\,dx = \frac{1}{12}.$$

Problema 3.

$$I_z = \iiint\limits_{\Omega} \rho(x,y,z)(x^2+y^2)dV = \iiint\limits_{\Omega} \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,(x^2+y^2)\,dV$$

Cambiando variables a coordenadas esféricas:
$x = r \operatorname{sen}\phi \cos\theta$, $y = r \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta$, $z = r \cos\phi$,
tenemos que $\Omega^* = \{\theta \in [0, 2\pi],\ r \in [0,1],\ \phi \in [0, \pi/4]\}$.
Este último valor se obtiene al imponer que su valor máximo tenga lugar en la intersección $x^2+y^2 = z^2 \Rightarrow 2z^2 = 1 \Rightarrow \phi = \pi/4$. Por último $x^2+y^2 = r^2 \operatorname{sen}^2\phi$ y $|J| = r^2 \operatorname{sen}\phi$.
Por lo que el valor de la integral es



$$\begin{aligned} I_z &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r^5 dr \int_0^{\pi/4} \operatorname{sen}^3\phi\, d\phi = \frac{2\pi}{6}\int_0^{\pi/4} \operatorname{sen}\phi\,(1-\cos^2\phi)\,d\phi = \\ &= \frac{\pi}{3}\left[-\cos\phi + \frac{\cos^3\phi}{3}\right]_0^{\pi/4} = \frac{\pi}{3}\left(-5\frac{\sqrt{2}}{12} + \frac{2}{3}\right) = \frac{\pi}{36}(-5\sqrt{2}+8). \end{aligned}$$

Problema 4. Aplicando la transformada de Laplace a ambos lados de la ecuación diferencial obtenemos

$$F(s)(s^2+2s+1) - (s+2) = \frac{1}{s+3},$$
$$F(s) = \frac{(s+2)(s+3)+1}{(s+1)^2(s+3)} \underset{\text{fracc.simples}}{=} \frac{3}{4}\frac{1}{s+1} + \frac{3}{2}\frac{1}{(s+1)^2} + \frac{1}{4}\frac{1}{s+3}.$$

Por lo que $y(t) = \frac{3}{4}e^{-t} + \frac{3}{2}te^{-t} + \frac{1}{4}e^{-3t}$.

Problema 5. Para calcular la integral de linea, parametrizamos la trayectoria como
$\sigma(t) = (2\cos t, 3 \operatorname{sen} t)$, $t \in [0, 2\pi]$, por lo que la integral del línea es

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} (-3\operatorname{sen} t, 2\cos t + 3\operatorname{sen} t)\cdot(-2\operatorname{sen} t, 3\cos t)dt = \int_0^{2\pi}(6 + 9\operatorname{sen} t\cos t)dt = 12\pi.$$

Denotando $(P,Q) = (-y, x+y)$ la integral doble queda de la forma

$$\iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA = \iint\limits_D 2\,dA \underset{C.V.}{=} 2\int_0^{2\pi} dt \int_0^1 6r\,dr = 2\cdot 2\pi\cdot 3r^2\big|_0^1 = 12\pi.$$

Donde el cambio de variable realizado es $x = 2r\cos t,\ y = 3r\operatorname{sen} t,\ r \in [0,1],\ t \in [0, 2\pi]$ cuyo Jacobiano es $J = 6r$.
Por lo tanto hemos verificado el Teorema de Green, es decir

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA.$$

Problema 6. Aplicando el Teorema de Gauss, obtenemos que

$$\begin{aligned} \iint\limits_{\partial\Omega} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} &= \iiint\limits_{\Omega} \nabla\cdot\mathbf{F}\,dV = \iiint\limits_{\Omega} (1 + xe^{x^2})\,dV = \\ &= \int_{-1}^1 (1+xe^{x^2})dx \int_{-1}^1 dy \int_{-1}^1 dz = 4\left[x + \frac{e^{x^2}}{2}\right]_{-1}^1 = 8. \end{aligned}$$